- $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)$ d'après le cours.

D'où $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([S_n = \ell])$

$$= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{\ell}}{\ell!} e^{-\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)} \longrightarrow \frac{\lambda^{\ell}}{k!} e^{-\lambda}$$

d'où la CV en loi de S_n vers $U \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

- $[S = S_n] = \left([S = S_n] \cap [\sum X_k \text{ CV}]\right)$

$$\cup \left(\underbrace{[S_n = -1]}_{\text{de proba nulle}} \cap [\sum X_k \text{ DV}]\right)$$

D'où $\mathbb{P}([S = S_n]) = \mathbb{P}\left([S = S_n] \cap [\sum X_k \text{ CV}]\right)$

Or $\mathbb{P}\left([S = S_n] \cap [\sum X_k \text{ CV}]\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\left[\sum_{k>n}^{+\infty} X_k = 0\right]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k>n} [X_k = 0]\right)$$

car X_k est à valeurs ≥ 0 p.s.

Or

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k>n}[X_k=0]\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n+1}^{N}[X_k=0]\Big)$$

et par indépendance, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n+1}^{N}[X_k=0]\Big) = \prod_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}([X_k=0])$

$$= \prod_{k=n+1}^{N} e^{-\lambda_k} = \exp\Big(-\sum_{k=n+1}^{N}\lambda_k\Big).$$

D'où $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k>n}[X_k=0]\Big) = \exp\Big(-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\lambda_k\Big)$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}([S_n=S]) = \exp\Big(-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\lambda_k\Big)}$

et $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\lambda_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où par encadrement

$$\mathbb{P}([S_n=S]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

- $\forall \varepsilon>0$, $[S_n=S] \subset [|S_n-S|<\varepsilon]$

d'où $\mathbb{P}([|S_n-S|<\varepsilon]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ce qui

montre que $\boxed{S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} S \text{ qd } n\to+\infty.}$

- Pour finir

$$\mathbb{P}([S=k]) = \mathbb{P}([S=k]\cap[S_n=S]) + \mathbb{P}([S=k]\cap[S_n\neq S]) \quad (1)$$

Or $\mathbb{P}([S=k]\cap[S_n\neq S]) \leq \mathbb{P}([S_n\neq S]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\mathbb{P}([S=k]\cap[S_n=S]) = \mathbb{P}([S_n=k]\cap[S_n=S])$

et grâce à l'égalité, $\bigcap_{k>n}[X_k=0] = [S_n=S]$

$$\mathbb{P}([S_n=k]\cap[S_n=S])$$

$$= \mathbb{P}\Big([S_n=k]\cap\Big(\bigcap_{k>n}[X_k=0]\Big)\Big)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}([S_n=k])}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}} \underbrace{\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k>n}[X_k=0]\Big)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

D'où par passage à la limite dans (1)

$$\mathbb{P}([S=k]) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \text{ ie } \boxed{S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)}$$